

Одномерная пространственная задача для управления параболического типа в нецилиндрической области

Р.Г. Зайнуллин¹

¹Уфимский государственный
авиационный технический университет

Адрес для связи: zaynulin_r.g@mail.ru

Ключевые слова: Фазовый переход, свободные границы, движущиеся границы, задача Стефана, конечные интегральные преобразования, вырожденные гипергеометрические функции, возмущенный дифференциальный оператор.

Излагается применение метода разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора к решению одной нестационарной задачи теплообмена с фазовым переходом в неавтономной постановке при специальных начальных условиях на примере процесса промерзания некоторой сплошной среды. Решение задачи начинается с ее преобразования к области с неподвижными границами, затем для решения преобразованной задачи строится конечное интегральное преобразование с неизвестным ядром, нахождение которого связано с постановкой и решением соответствующей спектральной задачи через вырожденные гипергеометрические функции. Находятся собственные значения и собственные функции, а также формула обращения для введенного интегрального преобразования, что позволяет выписать аналитическое решение задачи. В ходе решения задачи устанавливается параболический закон движения границы раздела двух фаз. Задачи подобного типа возникают при математическом моделировании процессов теплообмена в строительстве, особенно в районах вечной мерзлоты, в нефтегазодобыче при бурении и эксплуатации скважин, в металлургии и т.д.

One –dimensional spatial problem for a parabolic equation in a non- cylindrical domain

R.G. Zainullin¹

¹Ufa State Aviation Technical University

E-mail: zaynulin_r.g@mail.ru

Keywords: Phase transition, free boundaries, moving boundaries, Stefan problem, finite integral transformations, degenerate hypergeometric functions, perturbed differential operator.

The paper presents the application of the eigenfunction expansion method of a self-adjoint differential operator to the solution of a non-stationary heat transfer problem with a phase transition in a non-autonomous formulation under special initial conditions on the example of the freezing process of a continuous medium. The solution of the problem begins with its transformation to a region with fixed boundaries, then a finite integral is constructed to solve the transformed problem. Abstract: The application of the eigenfunction expansion method of a self-adjoint differential operator to the solution of a non-stationary heat transfer problem with a phase transition in a non-autonomous formulation under special initial conditions is presented on the example of the freezing process of a continuous medium. The solution of the problem begins with its transformation to a region with fixed boundaries, then to solve the transformed problem, a finite integral transformation with an unknown kernel is constructed, the finding of which is associated with the formulation and solution of the corresponding spectral problem through degenerate hypergeometric functions. We find the eigenvalues and eigenfunctions, as well as the inversion formula for the introduced integral transformation, which allows us to write out an analytical solution to the problem. In the course of solving the problem, the parabolic law of motion of the interface between the two phases is established. Problems of this type arise in the mathematical modeling of heat transfer processes in construction, especially in permafrost areas, in oil and gas production during drilling and operation of wells, in metallurgy, etc.

Доклад публикуется в авторской редакции

Введение

Краевые задачи для уравнений параболического типа в нецилиндрических областях за последние годы приобретают все большее значение как в теоретических, так и в прикладных разделах физики и математики. Количество работ, посвященных решению подобных задач, за последние годы стало заметно увеличиваться. Аналитический подход при решении краевых задач теплообмена в системах со свободными границами относится к числу труднейших проблем в современной аналитической теории математической физики. Вследствие зависимости положения характеристического раздела области от времени к этому классу задач неприменимы классические методы дифференциальных уравнений в частных производных, так оставаясь в рамках этих методов, не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы фазового перехода [1]. Поиск подходов в плане получения аналитического решения таких задач продолжается, и более того находится в самом начале этого пути. С этой точки зрения данная работа актуальна как по существу, так и содержит научную новизну – развитие теории интегральных преобразований на основе вырожденных гипергеометрических функций.

Суть метода решения изучаемой задачи состоит в том, что переходя в неподвижную систему координат из подвижной с помощью соответствующих преобразований, задача преобразуется к классическому случаю с фиксированной границей, но в ней появляются переменные коэффициенты. В последнем случае становится возможным применение метода конечных интегральных преобразований, ядра которых находятся через постановку и решение соответствующей спектральной задачи. Собственные функции выражаются через вырожденные гипергеометрические функции (ВГГФ). Используемый метод, в конечном счете, приводит к получению формулы обращения, что позволяет выписать аналитическое решение задачи и рассмотреть ряд частных случаев. В работах [2], [4] получены приближенно-

аналитические решения одномерных задач теплообмена со свободными границами в полярных и декартовых координатах.

Постановка задачи

Рассмотрим применение метода вырожденных гипергеометрических преобразований (ВГГП), разработанного в [5]-[6], к процессу теплообмена с фазовым переходом при затвердевании некоторой сплошной среды под действием точечного источника холода, когда граница фазового перехода имеет сферическую форму. В начальный момент времени среда обладает постоянной температурой $t_0 > 0$ при $r \geq a\xi_0$. Точечный источник обладает температурой $t_e < 0$. Образуются зоны промерзания ($k = 1$) и охлаждения ($k = 2$), и граница фазового перехода с течением времени продвигается внутрь среды. Математическую модель этого процесса для радиальной схемы можно представить в виде:

$$\frac{1}{a_k^2} \frac{\partial t_k(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t_k(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t_k(r, \tau)}{\partial r}; \quad (1.1)$$

$$r \in D_k(\tau): D_1(\tau) = \{0 < r < \xi_1(\tau)\}, D_2(\tau) = \{\xi_1(\tau) < r < \xi_2(\tau)\};$$

$$\tau > 0, \xi_1(+0) = \xi_0 > 0, \xi_2(\tau) = a\xi_1(\tau), a > 1;$$

$$t_1(r, 0) = \left(1 - \frac{r}{\xi_0}\right) t_e; \quad t_2(r, 0) = \frac{r - \xi_0}{(a-1)\xi_0} t_0; \quad (1.2)$$

$$t_1(0, \tau) = t_e; \quad t_k(\xi_1(\tau), \tau) = 0; \quad t_2(\xi_2(\tau), \tau) = t_0; \quad (1.3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(\xi_1(\tau), \tau)}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial t_2(\xi_1(\tau), \tau)}{\partial r} = \sigma v \frac{d\xi_1(\tau)}{d\tau}. \quad (1.4)$$

Здесь a_k^2 и λ_k – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности в $D_k(\tau)$, σ – скрытая теплота кристаллизации, а v – плотность образующейся фазы, a – безразмерный параметр теплового влияния [7].

Условие $\xi_2(\tau) = a\xi_1(\tau)$, $a > 1$ принято на основании данных многократных наблюдений, проводимых в мерзлотной лаборатории Института мерзлотоведения АН СССР под руководством Н.А. Цитовича [7]. Это объясняется тем, что среда обладает настолько большим тепловым сопротивлением, что влияние источника холода, имеющего конечную температуру, за конечный промежуток времени практически не может распространяться на бесконечно большое расстояние. В частности, из опыта замораживания грунтов установлено, что влияние температуры мерзлой части среды становится практически неуловимым на расстоянии равном 4-5 толщине промерзания. Точность определения $\xi_2(\tau)$ и $\xi_1(\tau)$ обусловлена точностью измерения температуры ($\pm 0.2^\circ\text{C}$). Для проверки предположения о линейной зависимости между толщиной промерзания $\xi_1(\tau)$ и расстоянием влияния $\xi_2(\tau)$ источника холода в период 1938-1950 г.г. были осуществлены натурные наблюдения и проведены специальные опыты. Из результатов наблюдений следует весьма важный вывод, заключающийся в том, что отношение расстояния влияния источника холода к толщине промерзания примерно одинаково и колеблется в небольших пределах (3-5).

Предполагаем, что $t_k(r, \tau)$ и $\xi_1(\tau)$ являются решениями задачи (1.1)-(1.4) для всех $0 < \tau < T \leq \infty$, если:

Нахождение собственных функций и закона движения свободной границы

Используя подстановку

$$r = y\xi_1(\tau) \quad (2.1)$$

и, вводя вспомогательные функции

$$T_k(y, \tau) = t_k(y\xi_1(\tau), \tau) - \begin{cases} (1-y)t_e & \text{при } k=1; \\ \frac{y-1}{a-1}t_0 & \text{при } k=2, \end{cases} \quad (2.2)$$

сведем задачу (1.1)-(1.3) к решению уравнения

$$\begin{aligned} \xi_1^2(\tau) \frac{\partial T_k(y, \tau)}{\partial \tau} = a_k^2 \frac{\partial^2 T_k(y, \tau)}{\partial y^2} + \left(\xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y + \frac{2a_k^2}{y} \right) \frac{\partial T_k(y, \tau)}{\partial y} - \\ - \left(\xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y + \frac{2a_k^2}{y} \right) \begin{cases} t_e & \text{при } k=1; \\ \frac{t_0}{1-a} & \text{при } k=2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

с однородными краевыми условиями

$$T_k(y, 0) = 0; \quad (2.4)$$

$$T_1(0, \tau) = T_k(1, \tau) = T_2(a, \tau) = 0. \quad (2.5)$$

Решение задачи (2.3) - (2.5) отыскиваем, используя метод конечных интегральных преобразований по y :

$$U_k(\gamma, \tau) = \int_{y_1}^{y_2} T_k(y, \tau) \rho_k(y) K_k(y, \gamma) dy, \quad (2.6)$$

где $y_1=0, y_2=1$ ($k=1$) и $y_1=1, y_2=a$ ($k=2$), с априори неизвестным ядром, полагая, что постулируемые ниже свойства преобразования (2.6) имеют место равномерно относительно τ . Ядра $K_k(y, \gamma)$ преобразования (2.6) являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} a_k \frac{\partial^2 [\rho_k(y) K_k(y, \gamma)]}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y + \frac{2a_k^2}{y} \right) \rho_k(y) K_k(y, \gamma) \right] + \\ + \mu_{k, \gamma}^2 \rho_k(y) K_k(y, \gamma) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

при однородных граничных условиях

$$K_1(0, \gamma) = K_k(1, \gamma) = K_2(a, \gamma) = 0, \quad (2.8)$$

где $\mu_k^2(\gamma)$ – величина, не зависящая от y . При этом преобразованное уравнение не будет содержать интегральных членов.

В дальнейшем, будем пользоваться формальными равенствами

$$K_k(y, \gamma) = K_{k, \gamma}(y); \quad \mu_k^2(\gamma) = \mu_{k, \gamma}^2; \quad U_k(\gamma, \tau) = U_{k, \gamma}(\tau),$$

в которых переменная γ принимает натуральные значения, что связано с условиями существования разложения решения задачи (2.3)-(2.5) по собственным функциям $K_{k, \gamma}(y)$, соответствующим собственным значениям $\mu_{k, \gamma}^2$. Для обеспечения условий, позволяющих получить это разложение, на уравнения (2.7) накладываем требование самосопряженности. Уравнения (2.7) преобразуются в самосопряженные, если только

$$a_k^2 \rho'_k(y) = \left(\xi_1(\tau) \xi'_1(\tau) y + \frac{2a_k^2}{y} \right) \rho_k(y).$$

Полагая, что $2\xi_1(\tau) \xi'_1(\tau) = \Lambda^2$, получаем весовую функцию

$$\rho_k(y) = y^2 \exp\left(\frac{\Lambda y}{2a_k}\right)^2 = y^2 \exp(\beta_k y^2)$$

с точностью до произвольного множителя и устанавливаем характер зависимости положения свободной границы от времени:

$$\xi_1^2(\tau) = \int_0^\tau \Lambda^2 d\eta = \Lambda^2 \tau + \xi_0^2.$$

Параметр Λ подлежит определению через условие (1.4). Он определяется характером положения и движения свободной границы и является функцией теп-лофизических характеристик и краевых условий.

После наложения требования самосопряженности уравнение (2.7) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_k(y) \frac{\partial K_{k, \gamma}(y)}{\partial y} \right] + \left(\frac{\mu_{k, \gamma}}{a_k} \right)^2 \rho_k(y) K_{k, \gamma}(y) = 0 \quad (2.9)$$

при однородных граничных условиях

$$K_{1, \gamma}(0) = K_{k, \gamma}(1) = K_{2, \gamma}(a) = 0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.9), при необходимости, можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 K_{k,\gamma}(y)}{\partial y^2} + 2\left(\beta_k y + \frac{1}{y}\right) \frac{\partial K_{k,\gamma}(y)}{\partial y} + \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{a_k}\right)^2 K_{k,\gamma}(y) = 0. \quad (2.11)$$

Задача (2.9)-(2.10) есть задача Штурма-Лиувилля. Подстановками

$$K_{k,\gamma}(y) = u_{k,\gamma}(z) \exp(-z), \quad z = \left(\frac{\Lambda y}{2a_k}\right)^2 = \beta_k y^2$$

уравнения (2.7) приводятся к вырожденным гипергеометрическим:

$$z \frac{\partial^2 u_{k,\gamma}(z)}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{2} - z\right) \frac{\partial u_{k,\gamma}(z)}{\partial z} - b_{k,\gamma} u_{k,\gamma}(z) = 0; \quad b_{k,\gamma} = 1 - \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\Lambda}\right)^2 \quad (2.12)$$

с однородными граничными условиями

$$u_{1,\gamma}(0) = u_{k,\gamma}(\beta_k) = u_{2,\gamma}(\beta_2 a^2) = 0. \quad (2.13)$$

Решая задачу (2.12)-(2.13), находим собственные функции задачи (2.9)-(2.10) ортонормированные с весом $\rho_k(y)$, которые имеют вид

$$K_{1,\gamma}(y) = C_{1,\gamma}^{-1} F\left(b_{1,\gamma}, \frac{1}{2}; z\right) \exp(-z); \quad K_{2,\gamma}(y) = C_{2,\gamma}^{-1} \Delta F\left(b_{2,\gamma}, \frac{1}{2}; z\right) \exp(-z), \quad (2.14)$$

где $C_{k,\gamma}^{-1}$ есть нормирующие множители для собственных функций.

В дальнейшем изложении предполагаем, что собственные функции нормированы.

Нетривиальные решения изучаемой задачи возможны лишь при значениях $\mu_{k,\gamma}$, удовлетворяющих характеристическим уравнениям

$$F\left(b_{1,\gamma}, \frac{1}{2}; \beta_1\right) = 0, \quad \Delta F\left(b_{2,\gamma}, \frac{1}{2}; \beta_2\right) = 0, \quad (2.15)$$

где

$$\Delta F\left(b_{2,\gamma}, \frac{1}{2}; \beta_2 y^2\right) = F\left(b_{2,\gamma} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \beta_2 a^2\right) F\left(b_{2,\gamma}, \frac{1}{2}; \beta_2 y^2\right) - F\left(b_{2,\gamma}, \frac{1}{2}; \beta_2 a^2\right) y F\left(b_{2,\gamma} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \beta_2 y^2\right).$$

Построение температурного поля

Преобразованием (2.6) задача (2.3)-(2.5) приводится к виду

$$\frac{\partial U_{k,\gamma}(\tau)}{\partial \tau} + \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\xi_1(\tau)} \right)^2 U_{k,\gamma}(\tau) = -\frac{H_{k,\gamma}}{\xi_1^2(\tau)}; \quad (3.1)$$

$$U_{k,\tau}(0) = 0, \quad (3.2)$$

$H_{k,\gamma}$ -- являются комбинацией ВГГФ [8]-[10].

Решение задачи (3.1) - (3.2) получается в виде

$$U_{k,\gamma}(\tau) = \int_{\tau}^0 \frac{H_{k,\gamma}}{\xi_1^2(\eta)} \exp \left[\int_{\tau}^{\eta} \left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\xi_1(\theta)} \right)^2 d\theta \right] d\eta.$$

Осуществив преобразования, обратные (2.6), и учитывая (2.1), (2.2), для распределения температурных полей получим следующие формулы:

$$t_{k,\gamma}(x, \tau) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} U_{k,\gamma}(\tau) K_{k,\gamma} \left(\frac{x}{\xi_1(\tau)} \right) + \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{\xi_1(\tau)} \right) t_e & \text{при } k=1; \\ \left(\frac{x}{\xi_1(\tau)} - 1 \right) \frac{t_0}{a-1} & \text{при } k=2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Функции $K_{k,\gamma} \left(\frac{x}{\xi_1(\tau)} \right)$ определяются формулами (2.14) и выражаются через комбинации вырожденных гипергеометрических функций.

Из условия Стефана (1.4) получаем соотношение для нахождения параметра Λ :

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[\lambda_1 U_{1,\gamma}(\tau) \frac{\partial K_{1,\gamma}(1)}{\partial y} - \lambda_2 U_{2,\gamma}(\tau) \frac{\partial K_{2,\gamma}(1)}{\partial y} \right] - \frac{\lambda_2 t_0}{a-1} - \lambda_1 t_e = \frac{1}{2} \sigma v \Lambda^2$$

При $\tau=0$ получим, что

$$\Lambda_0^2 = \frac{2}{v\sigma} \left(\frac{\lambda_2 t_0}{1-a} - \lambda_1 t_e \right). \quad (3.4)$$

С учетом того, что параметр Λ не зависит от времени τ , решение задачи (3.1) - (3.2) принимает вид:

$$U_{k,\gamma}(\tau) = \frac{H_{k,\gamma}}{\mu_{k,\gamma}^2} \left[\left(\frac{\xi_0^2}{\Lambda^2 \tau + \xi_0^2} \right)^{\left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\Lambda} \right)^2} - 1 \right].$$

Это решение соответствует случаю, когда $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$. При $\tau \rightarrow \infty$ для нахождения параметра Λ из условия (1.4) получается следующее соотношение:

$$\sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[\lambda_2 \frac{H_{2,\gamma}}{\mu_{2,\gamma}^2} \frac{\partial K_{2,\gamma}(1)}{\partial y} - \lambda_1 \frac{H_{2,\gamma}}{\mu_{1,\gamma}^2} \frac{\partial K_{1,\gamma}(1)}{\partial y} \right] - \frac{\lambda_2 t_0}{a-1} - \lambda_1 t_e = \frac{1}{2} \sigma v \Lambda^2.$$

В данном случае, при $\tau \rightarrow \infty$, решение (3.3) стремится к виду

$$t_k(x, \tau) = - \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{H_{k,\gamma}}{\mu_{k,\gamma}^2} K_{k,\gamma} \left(\frac{x}{\Lambda \sqrt{\tau}} \right) + \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{\Lambda \sqrt{\tau}} \right) t_e & \text{при } k=1; \\ \left(\frac{x}{\Lambda \sqrt{\tau}} - 1 \right) \frac{t_0}{a-1} & \text{при } k=2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Подставлением найденных значений Λ и $\mu_{k,\gamma}^2$ в (3.3) завершается решение поставленной задачи. В решении (3.3) присутствуют экспоненты с отрицательными показателями, что видно из формул (2.14), по которым можно судить о быстроте сходимости рядов.

Из теории задачи Штурма – Лиувилля [11] – [13] следует, что ряды (3.3) сходятся в среднем равномерно по τ , если интеграл

$$\int_{y_1}^{y_2} [T_k(y, \tau)]^2 \rho_k(y) dy < \infty$$

равномерно ограничен относительно τ . Сходимость в среднем означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{y_1}^{y_2} \left[T_k(y, \tau) - \sum_{\gamma=1}^n U_{k,\gamma}(\tau) K_{k,\gamma}(y) \right]^2 \rho_k(y) dy = 0, \quad (3.6)$$

то есть ортонормированная с весом $\rho_k(y)$ система собственных функций $K_{k,\gamma}(y)$ является полной [13] в рассматриваемом классе функций, которому принадлежит $T_k(y, \tau)$. Необходимым условием полноты системы функций $K_{k,\gamma}(y)$ является свойство замкнутости [13] этой системы, для которой выполняется равенство Парсеваля:

$$\int_{y_1}^{y_2} T_k^2(y, \tau) \rho_k(y) dy = \sum_{\gamma=1}^{\infty} C_{k,\gamma}^2 U_{k,\gamma}^2(\tau),$$

доказываемое с помощью условия (3.6).

Если функция $T_k(y, \tau)$ удовлетворяет сформулированным требованиям, то формула (3.3) представляет обратное преобразование. Из единственности разложения (3.3) следует взаимно-однозначное соответствие между функциями $T_k(y, \tau)$ и $U_k(\gamma, \tau)$. Поэтому, решив преобразованную задачу, как следствие, получаем решение исходной задачи.

Выводы и заключения

1. Методом разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора получено приближенно-аналитическое решение нестационарной одномерной задачи теплообмена с фазовым переходом в сферических координатах. Метод основан на теории интегральных преобразований с ядром, нахождение которого связано с постановкой и решением соответствующей спектральной задачи через ВГГФ. Установлено, что свободная граница движется по параболическому закону.

2. Метод нахождения собственных значений соответствующей спектральной задачи связан с теорией возмущений дифференциального оператора [14], [15].

3. Безразмерный параметр β_k , присутствующий в выражениях для решения задачи, зависит от краевых условий и теплофизических характеристик среды, а также характеризует положение и скорость движения свободной границы.

Список литературы

1. Э.М.Карташов. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в области с движущимися границами // Изв. РАН, Сер. Энергетика, 1999, №5, С.3-34.

2. Р.Г.Зайнуллин, З.Ю.Фазуллин. Краевая задача для уравнения параболического типа в нецилиндрической области // 2020, т.27, №2, С.3-20.

3. Р.Г.Зайнуллин, З.Ю. Фазуллин. Описание температурных полей процесса теплообмена с фазовым переходом // Успехи современной науки. Физико-математические науки, 2016, №7, С. 82-91.

4. Р.Г.Зайнуллин. Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи переноса тепла со свободными границами // Известия вузов. Математика, 2008, № 2, С. 24-31.

5. М.Н.Шафеев. Решение одной плоской задачи Стефана методом ВГП // Инженерно-физический журнал, 1978, т.34, №4, С. 713-722.

6. М.Н.Шафеев. Решение одной нелинейной задачи методом ВГП // Известия вузов. Математика, 1980, №12(233), С. 73-75.

7. Х.Р.Хакимов. Замораживание грунтов в строительных целях. М.: Госстройиздат, 1962, 257 с.

8. М.Абрамович, И.Стиган. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. М.: Наука, 1979, 832 с.

9. А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. Интегралы и ряды: Специальные функции, М.: Наука, 1983, 749с .

10. Л.Д.Слейтер. Вырожденные гипергеометрические функции. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968, 178 с.

11. Е.А.Коддингтон, Н.Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958, 474 с.

12. Н.С.Кошляков, Э.Б.Глинер, М.М.Смирнов. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа. 1970, 712 с.

13. А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984, 344 с.

14. В.А.Садовничий, В.В.Дубровский. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов // Труды семинара им. Петровского И.Г., М.: МГУ, 1994, Вып.17, С.244-248.

15. С.И.Кадченко. Метод регуляризованных следов // Вестник Юур-Гу., Сер. математическое моделирование и программирование, 2009, Вып.4, №37(170), С.4-23.